

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號: NSC 96-2416-H-004 -025 -MY3

計畫名稱:

退休與保險基金之策略性資產配置：預測學習效果下之動態避險

執行期限: 96年8月1日至99年10月31日

計畫主持人:張士傑 國立政治大學風險管理與保險學系教授

摘要

本研究探討長期投資人(諸如保險基金、退休金基金、高淨值自然人等)面臨通貨膨脹風險之最適投資決策。就長期基金投資決策者而言，通貨膨脹是無可避免卻又不易量化之風險，因為各國僅公布與之相關消費者物價指數而無實值通貨膨脹相關數值，本研究延伸 Brennan 和 Xia (2002)模型，以消費者物價指數修正通貨膨脹動態過程。利用貝式過濾方法(Bayesian Filtering Method)，將含有雜訊之消費者物價指數資訊，透過驗後分配估計通貨膨脹動態過程。於學習效果下完備化交易市場，以 Cox and Huang (1989, 1991)依平賭過程描述資產成長過程，求解資產公平價格，針對滿足定值相對風險趨避(Constant Relative Risk Aversion, CRRA)效用之決策者，分析最適投資組合特性。關鍵字：動態資產配置；通貨膨脹；可預測性；學習效果。

Abstract

Campbell and Viceira (2001) were the first to incorporate inflation risk into the optimal portfolio problem and found that the investor decreased the holding weights of long term bonds in the absence of inflation-linked underlying assets. Xia (2001) found that opportunity cost was significantly substantial when investors ignored the learning mechanism of uncertainty parameters and used the learning method to predict the parameter of the dynamics of stock price. In this study, we not only show that the learning process increases the utility value of terminal wealth, but also analyze the effect of learning process on the expected utility value of terminal wealth. The results are as follows.

1. Investment horizon, instantaneous volatility of inflation rate and risk attitude positively affects the learning process on the terminal wealth and its expected utility. The effects are more significant when the investment horizon, volatility and risk-averse

attitude increase.

2. When volatility of the consumer price index and the estimation error increase, the learning ability enhance the expected wealth and utility. However, the improvement rate of utility decrease since investors becomes hardly learn from the inflation rate.

Key words: Time horizon, expected utility, volatility, risk averse, improvement rate

一、計畫緣由及目的

Charles (2002)指出通貨膨脹對資產價值之重要性不可忽視。由於原油及原物料價格持續上升，基礎民生用品價格亦隨之調漲，從事資產管理的專業機構法人以及提供財富管理的諮詢顧問必須因應通貨膨脹風險並予以衡量與管控。舉例而言，若通貨膨脹長久維持 5%，經過 14 年後，原本之資產價值會因通貨膨脹因素造成實質價值減半。台灣於 2008 年 1 月到 5 月間之平均消費者物價指數(consumer price index；CPI)年化上升率為 3.7%¹，而五大銀行一年期定期存款利率之平均為 2.72%²。若依此情境

分析，長期投資者若將所得財富配置於保守之資產組合（諸如銀行定期存款等風險性低之固定收益投資標的），其所累積之財富將不足以抵抗通貨膨脹之侵蝕效果。

Campbell 和 Viceira (2001)首次將通貨膨脹風險納入模型，推導出最適投資與消費組合，他們發現當市場上缺乏與通貨膨脹風險連動之投資標的時，持有長年期債券比例會大幅降低。Brennan 和 Xia (2002)假設通貨膨脹率與利率服從 Ornstein-Uhlenbeck 過程，分析於有限時間軸及不允許放空限制下之最適投資策略，他們發現投資人之避險需求會隨著債券到期日與投資人之投資期限而改變。Battocchio 和 Menoncin (2004)研究確定提撥退休基金之資產配置，模型納入通貨膨脹風險時，發現通貨膨脹風險會使投資於無風險性資產之部位降低，轉至風險性資產。

上述研究並未將隨時間經過累積而得之通貨膨脹率資訊納入模型。我們其實無法直接觀察到通貨膨脹，只能利用選取指標近似。我們可以假設近似指標服從某動態過程，但參數是不確定的，而此不確定性會影響投資策略下之累積財富值。本研究假設通貨膨脹近似指標之動態過程參數具不確定性，而投資人可以（或必須）利用學習機制更新對參

¹ 資料來源：經濟部網頁(<http://www.moea.gov.tw/>)，查詢日期 2008 年 7 月 31 日。

² 五大銀行為「台灣銀行、合作金庫銀行、第一銀行、華南銀行及彰化銀行」，資料來源：中央銀行網頁(http://www.cbc.gov.tw/banking/rates_04.asp)，查詢日期 2008

年 7 月 31 日。

數之估計。

文獻對參數的不確定性會如何影響投資決策多有著墨，Bawa、Brown 和 Klein (1979)首先探討參數不確定性於單期模型下如何影響投資組合之擬定；Kandel 和 Stambaugh (1996)探討多期離散模型下，資產報酬是部分可預測下之經濟意涵；Barberis (2000)也發現於離散跨期模型下，投資人若忽略資產報酬不確定性所造成之風險，會過度投資於風險性資產。Gennotte (1986)、Detemple (1986), Dothan 和 Feldman (1986)、Feldman (1992)等則於連續時間架構下探討參數不確定性對投資策略之影響。這些研究顯示在非對數效用函數下，投資者必須將參數不確定風險納入模型假設，並應隨著時間的經過累積有關參數之資訊。Rogers (2001)指出於連續模型下，參數不確定性對投資人效用之影響更為顯著；Xia (2001)探討資產報酬的不確定性，研究發現投資人忽略市場時機 (market timing)之機會下會產生顯著之機會成本，即報酬率的預測非常重要。

除了探討參數不確定性對投資人的影響，文獻也提出方法來估計未知的參數，此估計的過程即稱為學習機制，大部分文獻多運用 Liptser 和 Shiriyayev (1978)所提出之最適濾網機制(optimal filtering equation)來估計未知參數，如 Gennotte (1986)、Dothan 和 Feldman

(1986)、Feldman (1992)、Brennan (1998)、Xia (2001)、Rodriguez (2002)。以 Brennan (1998)為例，假設投資人能藉由最適濾網學習機制修正資產價格動態過程之平均報酬參數，進一步推導最適投資策略，並發現若資產價格動態過程之平均報酬參數不確定性越高、投資期限越長，則學習效果越顯著，越偏愛風險之投資人在學習效果下傾向持有較多風險性資產。

Campbell 和 Viceira (2001)、Brennan 和 Xia (2002)提到對於長期投資人而言，通貨膨脹風險應納入模型。過去文獻在考慮通貨膨脹時，多假設其服從幾何布朗運動，並假設漂移項為固定常數，而忽略掉通貨膨脹動態過程之參數具不確定性。由前述文獻回顧得知忽略參數不確定性所推導之投資策略可能不是最適解，Xia (2001)也提到忽略對參數不確定性的預測可能會帶來很大之機會成本，因此，在面對基於總體經濟因素所造成的通貨膨脹風險下，本研究探討之長期投資人應設法預測模型中通貨膨脹動態過程之未知參數。因此，本文假設投資人或基金經理人可藉由最新觀察到之消費者物價指數（也就是學習機制³），更新對通貨膨脹動態過程之估計，

³學習機制指的是我們想描述某事件或某現象 A 的動態過程，但動態過程 A 之參數具不確定性，或動態過程 A 根本無從觀察，而需透過觀察動態過程 B 來近似 A，但 B 之參數具不確定性，此時，觀察者可藉由所累積有關 A 或 B 的資訊透過學習機制來更新對 A 的動態過程參數之估計。

進一步依不同投資風險偏好與投資期限長短差異，擬定最適動態資產配置。

為考慮通貨膨脹動態過程參數不確定性對投資策略之影響，Chang et al. (2008) 延伸 Campbell 和 Viceira (2001) 與 Brennan 和 Xia (2002)，將學習效果引入模型修正對通貨膨脹動態過程參數之估計，並推導納入通貨膨脹風險學習機制下之最適動態投資組合。本研究則著重於分析學習效果對投資人財富效用之影響與重要性。以「期末平均財富」、「期末財富變異數」、「期末財富第五百分位數」以及「期末財富效用平均值」四個指標，衡量學習機制在不同的投資期限(T)、風險容忍程度(γ)、消費者物價指數動態過程之瞬間波動度(ξ_π)、通貨膨脹動態過程之瞬間波動度(σ_π)與通貨膨脹率估計誤差之變異數(ν)等參數設定下，對投資人之影響。

我們發現對通膨的學習能力會顯著地影響最適動態投資組合之資產配置、期末財富、期末財富之不確定性、以及投資人之效用。在長短期滾動式債券之投資比例部分，最適解與學習機制修正後之通貨膨脹動態過程之隨機項有關，因此，通貨膨脹風險可利用長短兩種不同到期日之滾動式債券進行避險策略。且依學習機制修正之投資策略可顯著增

加投資人之預期期末財富與效用值，降低變異數，並可改善下方風險結構。

本文架構如下：第壹節為研究動機與相關文獻回顧，隨後建構通貨膨脹動態過程，並納入學習效果更新對通貨膨脹動態過程之假設。第參節為市場模型之假設，並說明最適投資組合問題，以及推導最適動態投資策略之封閉解，第肆節為數值分析，強調學習效果對投資人財富以及效用值之增加，最後為結論。

三、計畫成果自評

本文假設通貨膨脹之動態過程無法觀察，但可以用消費者物價指數預測未來通貨膨脹率。參考 Brennan 和 Xia (2002)、Basel、Ahmad 和 Wafaa (2004)，我們假設消費者物價指數(Π)服從以下動態過程：

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \pi(t)dt + \xi_\pi dz_\pi$$

$\pi(t)$ 為瞬間預期通貨膨脹率， ξ_π 為消費者物價指數動態過程之瞬間波動度， z_π 為標準布朗運動， dz_π 為相關雜訊⁴。 $\pi(t)$ 並非固定不變，而會隨時間變動且無法觀察，本文利用學習過程更新與修正 $\pi(t)$ 之擴散過程。

令消費者物價指數所構成之訊息集合為 $\Pi_0^t \equiv \{\Pi(s) | 0 \leq s \leq t\}$ ，假設瞬間預

⁴ 在不會造成混淆下，文章中忽略下標時間 t 。

期通貨膨脹率 $\pi(t)$ 服從以下擴散過程：

$$d\pi(t) = \mu_\pi(t)dt + \sigma_\pi(t)dz_\pi + \sigma_\tau(t)dz_\tau$$

此擴散過程包括瞬間預期平均成長率 μ_π ，及代表通貨膨脹動態過程之誤差隨機項 dz_π 與 dz_τ ，係數分別為 σ_π 與 σ_τ 。誤差隨機項來源 dz_π 與消費者物價指數動態過程之隨機項相同，但通貨膨脹動態過程還受到另一誤差項 dz_τ 影響。

檢視台灣 1960 年 1 月到 2007 年 12 月共 564 個月之月消費者物價指數⁵，發現消費者物價指數間存在 AR(1) 線性迴歸關係⁶，因此，假設通貨膨脹動態過程之漂移項 $\mu_\pi(t)$ 服從式(3)：

$$\mu_\pi(t) = a_0(t) + a_\pi(t)\pi(t)$$

注意， a_π 需小於 0。

假設 $\pi(0)$ 為投資人在時間點 t 為 0 時所能觀察到的資訊，並服從 $N(\hat{\pi}(0), \nu(0))$ 常態分配。在此通貨膨脹率之先驗分配下，根據 Liptser 和 Shirayayev (1978) 所提出之最適濾網等式 (optimal filtering equation)，可求得通貨膨脹率 $\pi(t)$ 之後驗分配。假設 $F_t^\Pi = \sigma\{\omega: \Pi(s), s \leq t\}$ 為投資人從時間

點 0 到 t 所累積的消費者物價指數訊息所構成之序列資訊集合 (σ -algebra)，則 $\hat{\pi}(t) = E[\pi(t) | F_t^\Pi]$ 為 $\pi(t)$ 之最佳貝氏估計， $\nu(t) = E[(\hat{\pi}(t) - \pi(t))^2 | F_t^\Pi]$ 為對通貨膨脹率估計誤差之變異數。根據 Chang et al. (2008) 之推導，可推得經學習機制修正之通貨膨脹率動態過程為式 (4)：

$$\begin{aligned} d\hat{\pi}(t) &= [a_0(t) + a_\pi(t)\hat{\pi}(t)]dt + \frac{\sigma_\pi \xi_\pi(t) + \nu(t)}{\xi_\pi(t)} d\hat{z}_\pi(t) \\ \xi_\pi d\hat{z}_\pi &= (\pi(t) - \hat{\pi}(t))dt + \xi_\pi dz_\pi \end{aligned} \quad (4)$$

學習機制不但校正漂移項 $\mu_\pi(t)$ 之估計，同時也校正隨機項之估計，在(4)式中，漂移項與隨機項不再只是簡單之布朗運動，能隨著資訊更新、時間演進而持續修正(3)差。透過動態學習過程，模型將可精確地描述通貨膨脹之動態過程。

為簡化模型，假設 $a_0(t)$ 、 $a_\pi(t)$ 為常數，然後將式(4)改寫為符合 Ornstein-Uhlenbeck 過程之形式可得式(5)與(6)：

$$d\hat{\pi}(t) = -a_\pi \left[-\frac{a_0}{a_\pi} - \hat{\pi}(t) \right] dt + \frac{\sigma_\pi \xi_\pi(t) + \nu(t)}{\xi_\pi(t)} d\hat{z}_\pi(t) \quad (5)$$

$$d\hat{\pi}(t) = \alpha(\bar{\pi} - \hat{\pi}(t))dt + \hat{\sigma}_\pi d\hat{z}_\pi(t) \quad (6)$$

α 為 $-a_\pi$ 、 $\bar{\pi}$ 為 $-\frac{a_0}{a_\pi}$ ，而 $\hat{\sigma}_\pi$ 等於

$$\frac{\sigma_\pi \xi_\pi(t) + \nu(t)}{\xi_\pi(t)}。$$

⁵ 資料來源：行政院主計處之統計資料，網頁 <http://www.dgbas.gov.tw/mp.asp?mp=1>，查詢日期 2008 年 8 月 2 日

⁶ $R^2 = 99.95\%$ 。

本研究假設投資於四種名目資產：無風險名目現金、股票大盤指數、長、短期滾動式債券，以這四種資產為標的的前提下，找出最適投資組合。並考慮利率風險、市場風險以及通貨膨脹風險。考量以上風險及資產動態過程後，利用平賭方法將最適資產配置以封閉解的型式解出。

一、金融市場模型

假設市場為完備、可連續交易並無套利空間，並有四種類型投資標的：無風險名目現金、股票指數基金以及長、短期名目滾動式債券⁷ (rolling bonds)。市場上有三種風險來源，市場風險 dz_s 、利率風險 dz_r 以及通貨膨脹風險 $d\hat{z}_\pi$ ，三種風險間互相關連，可表示為 $dz = [dz_s \ dz_r \ d\hat{z}_\pi]^T$ 。根據 Brennan 和 Xia (2002)，實質折現因子為式(7)：

$$\frac{M_t}{M_s} = \exp \left\{ -\int_s^t r(u)ds + \int_s^t \phi^T dz(u) - \frac{1}{2} \int_s^t \phi^T \rho \phi du \right\} \quad (7)$$

$r(t)$ 為時間點 t 之實質利率， $\phi = [\phi_s \ \phi_r \ \phi_\pi]^T$ 代表風險性資產之風險溢酬係數， ρ 為 dz_s 、 dz_r 與 $d\hat{z}_\pi$ 之相關係數矩陣，其列向量分別為 $[1, \rho_{sr}, \rho_{s\pi}]$ 、 $[\rho_{sr}, 1, \rho_{r\pi}]$ 與 $[\rho_{s\pi}, \rho_{r\pi}, 1]$ 。

假設實質利率 $r(t)$ 服從以下 Vasicek 模型(1977)：

$$dr(t) = \kappa(\bar{r} - r)dt + \sigma_r dz_r \quad (8)$$

κ 為利率反轉速度 (mean reversion speed)， \bar{r} 代表利率之平均長期水準，而 σ_r 為利率變動之瞬間波動度， dz_r 代

表隨機誤差項。名目利率 $R(t)$ 等於 $r(t) + \hat{\pi}(t) + \xi_\pi \lambda_\pi$ ⁸，而四種類型投資標的之動態隨機過程如下：

(1) 名目現金 $S_0(t)$

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = R(t)dt \quad (9)$$

(2) 股票指數型基金 $S(t)$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = R(t)dt + \sigma_s (dz_s + \lambda_s dt) \quad (10)$$

σ_s 為股票指數基金報酬率之瞬間波動度， λ_s 是指每單位市場風險之風險溢酬。

(3) 長、短期名目滾動式債券 ($B(t, T_i)$ ， $i=1, 2$)

$$\frac{dB(t, T_i)}{B(t, T_i)} = R(t)dt + \sigma_{ri}(t)(dz_r(t) + \lambda_r dt) + \sigma_{\pi i}(t)(d\hat{z}_\pi + \lambda_\pi dt) \quad (11)$$

T_1 、 T_2 分別代表兩個不同債券到期日，而 $\sigma_{ri}(t) = -\kappa^{-1}(1 - e^{-\kappa i})\sigma_r$ 、 $\sigma_{\pi i}(t) = -\alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha i})\hat{\sigma}_\pi$ 分別代表名目滾動式債券報酬率承受利率風險與通貨膨脹風險之風險係數，而 λ_r 與 λ_π 分別代表每單位利率與通貨膨脹風險之風險溢酬。

將風險性資產之動態過程整理可得以下矩陣：

$$\begin{bmatrix} \frac{dS(t)}{S(t)} \\ \frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} \\ \frac{dB(t, T_2)}{B(t, T_2)} \end{bmatrix} = R(t)dt + \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r1}(t) & \sigma_{\pi 1}(t) \\ 0 & \sigma_{r2}(t) & \sigma_{\pi 2}(t) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \\ \lambda_\pi \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} dz_s \\ dz_r \\ d\hat{z}_\pi \end{bmatrix} \right\}^P$$

$$= R(t)dt + \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r1}(t) & \sigma_{\pi 1}(t) \\ 0 & \sigma_{r2}(t) & \sigma_{\pi 2}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz_s \\ dz_r \\ d\hat{z}_\pi \end{bmatrix}^Q$$

其中 P 代表主觀風險測度，而 Q 則代表

⁷詳細的滾動式債券說明見 Rutkowski (1999)。這類債券的到期日並不隨著時間經過而變短，可簡化最適投資策略之推導。

⁸推導可見 Chang et al. (2008)。

風險中立測度，因此，

$$\begin{bmatrix} dz_s \\ dz_r \\ dz_\pi \end{bmatrix}^Q = \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \\ \lambda_\pi \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} dz_s \\ dz_r \\ dz_\pi \end{bmatrix}^P$$

代表不同測度下之布朗運動轉換，而

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{r1}(t) & \sigma_{\pi1}(t) \\ 0 & \sigma_{r2}(t) & \sigma_{\pi2}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \\ \lambda_\pi \end{bmatrix}$$

則代表

風險性資產承擔風險所產生之風險溢酬。

我們將三種型態風險來源之風險溢酬表示成風險之市場價格(market price of risk)

向量 θ ， $\theta^T = [\lambda_s \quad \lambda_r \quad \lambda_\pi]$ 。對任何時間點 t ，名目最適成長投資組合 $H(t)$ 為

下式(12)：

$$H(t) = \exp \left\{ \int_0^t R(s) ds + \int_0^t \theta^T dz(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \theta^T \rho \theta ds \right\} \quad (12)$$

其倒數 $H^{-1}(t)$ 為名目折現因子 (shadow state-price density，又稱為 pricing kernel)，可用來推導市場上資產組合之預期成長。

二、最適投資組合的問題與解

由於自然人或機構法人對資產累積之風險態度不同，故本研究使用固定相對風險趨避 (constant relative risk aversion, CRRA) 效用函數來衡量投資人之風險態度。給定效用函數服從下式 (13)：

$$U(W) = \begin{cases} \frac{W^\gamma}{\gamma}, & \gamma \in (-\infty, 1) \setminus \{0\} \\ \ln W, & \gamma = 0 \end{cases} \quad (13)$$

投資人將其財富投資 $w_t^{B_1}$ 、 $w_t^{B_2}$ 比例於到期日 T_1 、 T_2 之名目滾動式債券， w_t^S 比例於股票指數型基金，而 $(1 - w_t^{B_1} - w_t^{B_2} - w_t^S)$ 於名目現金。投資組合問題為極大化期望期末財富效用，可表示為(14)式：

$$\max_{(w_t)_{t \in [0, T]} \in A} EU[W(T)] \quad (14)$$

A 代表相符之隨機控制因子 (admissible stochastic controls) 集合，而資產累積過程 $(W(t))_{t \in [0, T]}$ 為：

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = (1 - w_t^{B_1} - w_t^{B_2} - w_t^S) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + w_t^{B_1} \frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} + w_t^{B_2} \frac{dB(t, T_2)}{B(t, T_2)} + w_t^S \frac{dS(t)}{S(t)}$$

$W(0) = W_0$

為求解(14)式，將其改寫成下式：

$$\begin{cases} \max_{W \in L_t^P(\Omega, F, P)} E \{ U(W(T)) \} \\ \text{s.t. } W \text{ 由 } (W_t) \in A \text{ 融資，且 } E_0^P \left[\frac{W(T)}{H(T)} \right] = W_0 \end{cases}$$

任何時間點 t 之最適財富函數可表示成名目最適成長投資組合 $H(t)$ 與時間 t 之函數 $F(H(t), t)$ ：

$$F(H(t), t) = E_t \left[I \left(\frac{\theta}{H(T)} \right) \frac{H(t)}{H(T)} \right] = \theta^{\gamma/(1-\gamma)} H(t)^{\gamma/(1-\gamma)} E_t \left[\left(\frac{H(T)}{H(t)} \right)^{\gamma/(1-\gamma)} \right] \quad (16)$$

而其邊界條件為：

$$F(H(0), 0) = \theta^{\gamma/(1-\gamma)} E_0 \left[H(T)^{\gamma/(1-\gamma)} \right] = W_0 \text{ 且}$$

$$\theta = \left(\frac{E_0 \left[H(T)^{\gamma/(1-\gamma)} \right]}{W_0} \right)^{1-\gamma} \quad (17)$$

Chang et al. (2008) 並推得(15)式之最適解如下：

$$\begin{aligned}
 w_t^{B_1} &= \frac{k_2 \left(T-t, \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \sigma_r \sigma_{\pi_2}(t) - k_3 \left(T-t, \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \hat{\sigma}_\pi \sigma_{\pi_2}(t)}{\sigma_{r_2}(t) \sigma_{\pi_1}(t) - \sigma_{r_1}(t) \sigma_{\pi_2}(t)} \\
 &\quad + \frac{1}{1-\gamma} \frac{-\lambda_r \sigma_{\pi_2}(t) + \lambda_s \sigma_{r_2}(t)}{\sigma_{r_2}(t) \sigma_{\pi_1}(t) - \sigma_{r_1}(t) \sigma_{\pi_2}(t)} \\
 w_t^{B_2} &= \frac{k_3 \left(T-t, \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \sigma_r \hat{\sigma}_\pi(t) - k_2 \left(T-t, \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \sigma_r \sigma_{\pi_1}(t)}{\sigma_{r_2}(t) \sigma_{\pi_1}(t) - \sigma_{r_1}(t) \sigma_{\pi_2}(t)} \\
 &\quad + \frac{1}{1-\gamma} \frac{\lambda_r \sigma_{\pi_1}(t) - \lambda_s \sigma_{r_1}(t)}{\sigma_{r_2}(t) \sigma_{\pi_1}(t) - \sigma_{r_1}(t) \sigma_{\pi_2}(t)} \\
 w_t^S &= \frac{1}{1-\gamma} \frac{\lambda_s}{\sigma_s} \\
 w_t^{S_0} &= 1 - w_t^{B_1} - w_t^{B_2} - w_t^S
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

其中， $k_i(T-t, c) = k_r(\eta_r, \mu_r, T-t) k_\pi(\eta_\pi, \mu_\pi, T-t)$

$$\exp\left\{ (T-t) \left(\frac{1}{2} (\theta^T \rho \theta + c \lambda_s^2) + c \Psi - \xi_r \lambda_r - \frac{\lambda_s}{\sigma_r} \kappa \bar{r} - \frac{\lambda_s}{\sigma_\pi} \alpha \bar{\pi} \right) \right\}$$

$$k_2(T-t, c) = h_2(\eta_r, \mu_r, T-t) + \eta_r,$$

$$k_3(T-t, c) = h_3(\eta_\pi, \mu_\pi, T-t) + \eta_\pi. \tag{9}$$

上述解代表最適投資策略之持股比例 (w_t^S) 只和市場風險 (σ_s)、每單位市場風險所對應之風險溢酬 (λ_s)、以及投資人之風險趨避程度 (γ) 有關；與資產之變化無關。長短期滾動式債券之投資比例 ($w_t^{B_1}$ 、 $w_t^{B_2}$) 與學習機制修正後之通貨膨脹動態過程的隨機項 ($\hat{\sigma}_\pi$) 有關，因此，通貨膨脹風險可以利用長短期滾動式債券執行避險策略。

$$\begin{aligned}
 \eta_r &= c \lambda_r / \sigma_r, \quad \mu_r = -c(1 + \lambda_r \kappa / \sigma_r), \\
 \eta_\pi &= c \lambda_\pi / \hat{\sigma}_\pi, \quad \mu_\pi = -c(1 + \lambda_\pi \alpha / \hat{\sigma}_\pi).
 \end{aligned}$$

滾動式債券 $dB(t, T_i) / B(t, T_i) = Rdt + \sigma_{r_i}(dz_r + \lambda_r dt) + \sigma_{\pi_i}(d\hat{z}_\pi + \lambda_\pi dt)$

$$h_2(\eta_r, \mu_r, T-t) = -\eta_r e^{-\kappa(T-t)} + \mu_r (1 - e^{-\kappa(T-t)}) / \kappa$$

$$h_3(\eta_\pi, \mu_\pi, T-t) = -\eta_\pi e^{-\alpha(T-t)} + \mu_\pi (1 - e^{-\alpha(T-t)}) / \alpha$$

股票指數型基金 $dS/S = Rdt + \sigma_s(dz_s + \lambda_s dt)$

$$k_r(\eta_r, \mu_r, T-t) = \exp\left\{ \frac{\bar{r}(\mu_r / \kappa + \eta_r)(1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \mu_r \bar{r}(T-t) + \eta_r^2 \sigma_r^2 (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) / 4\kappa}{\frac{\mu_r^2 \sigma_r^2}{2} \int_0^T (1 - e^{-\kappa(T-u)})^2 / \kappa^2 du - \eta_r \mu_r \sigma_r^2 \int_0^T e^{-\kappa(T-u)} (1 - e^{-\kappa(T-u)}) / \kappa du} \right\}$$

相關係數

$$k_\pi(\eta_\pi, \mu_\pi, T-t) = \exp\left\{ \frac{\bar{\pi}(\mu_\pi / \alpha + \eta_\pi)(1 - e^{-\alpha(T-t)}) - \mu_\pi \bar{\pi}(T-t) + \eta_\pi^2 \hat{\sigma}_\pi^2 (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) / 4\alpha}{\frac{\mu_\pi^2 \hat{\sigma}_\pi^2}{2} \int_0^T (1 - e^{-\alpha(T-u)})^2 / \alpha^2 du - \eta_\pi \mu_\pi \hat{\sigma}_\pi^2 \int_0^T e^{-\alpha(T-u)} (1 - e^{-\alpha(T-u)}) / \alpha du} \right\}$$

肆、數值與學習效果效益之分析

本節將根據第參節之最適動態投資策略，分析通貨膨脹之學習效果對投資人所帶來之效益與影響。本節分為兩部分，第一部份討論投資期間與各項資產比重之關係；第二部份則討論在參數設定下，有無學習效果對投資人之財富改變以及效用增減的影響。表1之參數設定係參考Brennan和Xia (2002)，根據美國1970年1月到1995年12月之實證資料估計及設定參數。

一、最適投資策略之動態資產比例

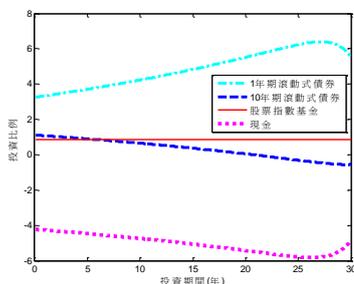
假設投資人之投資期限 T 為30年，所選取之長、短期滾動式債券長度分別為10年與1年。對風險趨避參數 γ 為-1.5之投資人而言，在考量通貨膨脹學習效果下之最適動態資產配置策略如圖1。

表1：資產動態過程參數設定表

參數	設定值
$dr = \kappa(\bar{r} - r)dt + \sigma_r dz_r$	
κ	0.631
\bar{r}	0.012
σ_r	0.026
$d\hat{\pi} = (a_0 + a_\pi \hat{\pi})dt + \hat{\sigma}_\pi d\hat{z}_\pi, \hat{\sigma}_\pi = (\sigma_\pi \xi_\pi + \nu) / \xi_\pi$	
a_0	0.001458
a_π	-0.027
σ_π	0.05
ν	0.001
ξ_π	0.05
λ_r	-0.209
λ_π	-0.105
$dS/S = Rdt + \sigma_s(dz_s + \lambda_s dt)$	
σ_s	0.158
λ_s	0.343

$\rho_{r\pi}$	-0.061
$\rho_{S\pi}$	-0.024
ρ_{S_r}	-0.129

圖 1：考量學習效果下的長期資產配置



紅色細線代表最適股票投資比例(0.868)，並不隨著時間改變，但其餘資產之投資比例之變動較為顯著。依圖1，短年期(1年期)滾動式債券(淡藍色點虛線)的投資比例在期初約為3.250，隨時間經過，最適持有比例持續增加，顯示在通貨膨脹風險下，投資人持有短期債券可即刻獲取債券利息，應該優先持有，且持有比例隨著時間有所不同。以 γ 為-1.5之投資人為例，投資約16年後(196個月)之持有比重會大於5，這也代表長、短期投資人之避險需求有顯著差異。

名目無風險現金之報酬率低，對長期投資者是較不利之投資標的，因此在最適投資組合中，投資者大多採放空方式，且越到投資後期放空比例越大(紫色虛線)。在10年期滾動式債券部分(藍色長虛線)，初期投資比重約為1.110，但持有比例持續下降，在投資約21年後(249個月)改為放空長期債券，這可能是因為接近期末，必須降低投資風險所致。

二、學習效果對財富效用增減之分析

過去文獻並未對學習效果的影響多加分析，本節從資產配置比例與財富與效用值之變化兩方面說明學習效果之影響。在財富與效用值部分，我們衡量

「期末平均財富」、「期末財富變異數」、「期末財富第五百分位數」以及「期末財富效用平均值」四個指標。在具學習效果下，投資人能較準確估計通貨膨脹動態過程進行擬定動態投資策略，因此，在具學習效果下，期末平均財富金額應該累積較高。同時，也能使所累積的財富較為集中，故學習效果下，期末財富變異數應該較小。下方風險則是計算期末財富的第五百分位數，說明在市場狀況不佳時，投資策略所對應的期末財富值。以上三個指標用來說明學習效果對投資人是重要的。而期末財富效用平均值改善率則是用來衡量與說明參數變化對於學習效果之影響。分別對投資期限(T)、風險容忍程度(γ)、消費者物價指數動態過程之瞬間波動度(ξ_π)、通貨膨脹動態過程之瞬間波動度(σ_π)與通貨膨脹率估計誤差之變異數(ν)五個參數進行敏感度分析。

有無學習效果的分析方式如下，假設在不同投資期限下，有兩類型態投資人：一類投資人使用學習效果修正對通貨膨脹之估計，並推算最適投資策略；另一類投資人在考慮投資組合時並未運用學習效果。所謂沒有學習機制有兩種可能：投資人更新資訊卻缺乏精確模型，所以產生誤差；投資人不利用新資訊更新其對通貨膨脹的先驗假設(prior estimation)。本研究假設投資人更新資訊卻缺乏精確模型，猜測參數 a_0 與 a_π ，但平均而言估計正確。採用這個假設比較的原因，是可以根據相同投資策略封閉解(第18式)評估有學習能力與猜測的差異。投資人不利用新資訊更新先驗假設相當於第5式等於0，要求 $a_\pi=0$ ，此假設改變最適投資策略解，因此無法比較差異，同時也與事實產生差距。

有學習能力的投資人會按照(6)式更新對通貨膨脹的估計，而且會按照第參節所推導之最適投資策略來分配其投資比重。但無學習能力的投資人沒有任何依循來更新其對通膨的估計，只能隨意猜測。因此我們假設在無學習效果的情境下，(6)式之飄移項係數，包括瞬間通貨膨脹成長率截距項(a_0)與瞬間通貨膨脹成長率迴歸係數項(a_π)，皆服從均勻分配(uniform distributions)¹⁰。我們將分別計算此兩類型投資人之期末平均財富、變異數、第五百分位數以及效用值，並比較其差異。

(一)投資期限 (T)

1.最適投資策略之敏感度

圖 2 繪出三種投資期限投資人之最適動態投資策略，投資長度由短至長為 20、25 與 30 年。由圖 2 發現此四種資產之投資比例並未因為投資期間變長而有顯著之變化。比較圖 2 之上中下三部分，形狀皆類似。投資於股票指數基金之最適比例為定值 0.868，並未因投資期間長度而改變；投資於 10 年期滾動式債券之比例，從投資初期到投資末期皆有下降趨勢，這可能是因為接近期末，必須降低投資風險所致，因此投資人慢慢從持有長年期滾動式債券變成放空。另一方面，當投資期間較短時，期初之長年期滾動式債券最適持有比例較少。

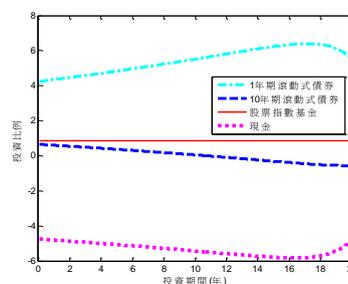
在另外兩項投資標的方面，1 年期滾動式債券之投資比例，從投資初期到投資末期皆有上升趨勢；當 T 越大時，

¹⁰ 由於 a_π 需為負數，因此我們不用常態分配(normal distribution)來抽取 a_0 與 a_π 的值，在不具學習效果下，投資人對 a_0 的臆測服從 $U(0,0.002916)$ ，對 a_π 的臆測服從 $U(-0.054,0)$ 。

期初投資在短年期滾動式債券之部位會增加。投資於名目無風險現金之最適投資比例，從期初到期末都是放空狀態。綜上所述，最適投資比例對於投資時間長度之變動並不敏感，不論投資長度是 20、25 或 30 年，最適策略皆相似。

假設投資人期初投資 1 元，圖 3 的藍色斜紋柱代表於 50,000 組模擬下，無學習效果之期末平均財富值，綠色點狀柱則代表有學習效果之期末平均財富值，而曲線代表有學習效果與無學習效果期末平均財富之比值¹¹。由圖 3 發現，當對通貨膨脹具有學習效果時，所累積之財富均比沒有學習效果時高，同時，隨著投資期間越長，學習效果所造成之影響會較顯著。若投資期間為 10 年以下，有無學習機制對財富累積的效果並不明顯，但當時間越長，財富累積差異逐漸顯著，例如：投資期間為 20 年時，有無學習效果之期末財富比為 1.066；而若將投資期間拉長至 30 年以上時，對通貨膨脹有學習效果之累積財富是無學習效果約一成以上。因此，學習效果對財富累積有顯著之影響，此影響會隨著投資期限增加而增加。

圖 2：不同投資期間之投資比例
(上： $T = 20$ 、中： $T = 25$ 、下： $T = 30$)



¹¹ 期末財富比 = 有學習效果之平均期末財富 ÷ 無學習效果之平均期末財富

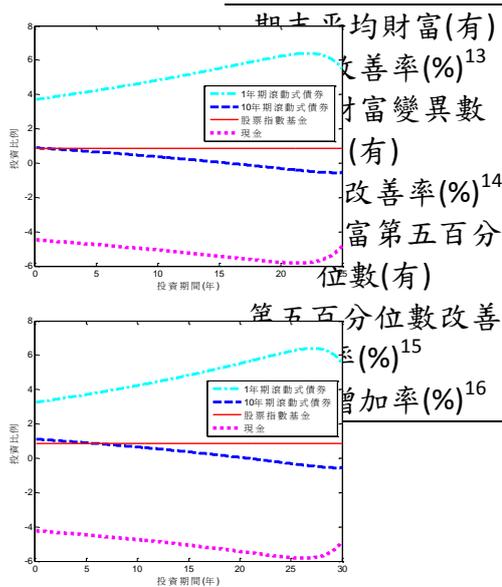
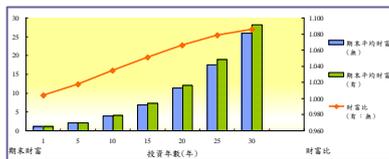


圖 3：不同投資期間下學習效果對期末平均財富的影響



2. 學習效果之效益

表 2 列出模擬 50,000 次下，有無學習效果之期末財富變異數與第五百分位數。我們可以看到，當投資期間為 5 年以上時，學習效果對期末財富變異數之改善率達到兩成以上，當投資期間為三十年時，學習效果可降低四成的變異數。在代表下方風險的第五百分位數部分，學習機制能有效提高期末財富的第五百分位數，顯示學習機制能更有效的抵抗下方風險，為投資人提高第五百分位數的值。

表 2：學習效果對不同投資期間之期末平均財富¹²與效用影響值

時間(年)	1	5	10	15	20
-------	---	---	----	----	----

期末平均財富(有)	1.169	2.107	4.069	7.252	12.099	18.946
改善率(%) ¹³	0.355	1.756	3.463	5.096	6.614	7.859
財富變異數(有)	0.001	0.012	0.125	0.857	4.420	17.646
改善率(%) ¹⁴	7.134	21.283	25.220	26.355	28.769	24.187
第五百分位數(有)	1.127	1.932	3.511	5.837	8.986	12.891
改善率(%) ¹⁵	0.535	0.315	6.750	10.915	15.918	21.993
增加率(%) ¹⁶	0.537	2.735	5.565	8.593	12.081	16.367

表 2 也列出學習機制對期末財富效用之增加率，我們發現學習機制對投資人所帶來的效用增加率會隨著投資期間增加而提高(從 $T=1$ 的 0.537% 增加到 $T=30$ 的 22.016%)，這再次說明學習效果對財富累積之影響，會隨投資期限增加而增加。

(二) 風險容忍程度 (γ)

投資人之風險容忍度與其願意投資在各種資產之比例有關，投資人對風險態度越趨避，就越不願意投資於風險性資產，會選擇資產波動度小、平均報酬相對較小之資產；反之，當投資人風險容忍程度較高時，較願意持有風險性資產。所以我們這一部分將探討投資人之風險趨避程度對資產配置之影響，觀察不同風險趨避參數(γ)對資產配置比例的敏感度分析，再分析有無學習效果對於不同風險容忍度投資人財富與效用之影響。

1. 最適投資策略之敏感度

¹³ 財富改善率=(有學習機制之期末平均財富-無學習機制之期末平均財富)÷無學習機制之期末平均財富

¹⁴ 變異數改善率=(無學習機制之財富變異數-有學習機制之財富變異數)÷無學習機制之財富變異數

¹⁵ 第五百分位數改善率=(有學習機制之財富第五百分位數-無學習機制之財富第五百分位數)÷無學習機制之財富第五百分位數

¹⁶ 效用增加率=(有學習效果之期末財富效用平均值-無學習效果之期末財富效用平均值)÷無學習效果之期末財富效用平均值。效用平均值為計算 50,000 次模擬下期末財富效用值的平均數。

¹² 期末平均財富指的是模擬 50,000 次下，期末財富之平均數。

圖 4 顯現 2 種風險趨避程度($\gamma = -1$ 與 $\gamma = -3$)投資人之最適動態投資組合，風險趨避參數(γ)越小代表越風險趨避¹⁷。比較發現，隨著 γ 遞減，股票指數型基金的持有比例也跟著降低，當 γ 為 -1 時，股票指數基金持有比例為 1.085；當 γ 遞減至 -3 時，股票指數型基金持有比例減少至 0.543。這是因為模型所設定之投資標的中，股票指數型基金較滾動式債券的風險性高，屬於高風險性資產，因此，當 γ 越小，投資人越風險趨避時，投資在此標的之投資比重會下降。

保守投資人追求波動度低之資產，此策略會使所累積之期末平均財富較少，由圖 5 可發現這個特徵，無論投資人對通貨膨脹過程是否有學習效果，隨著風險趨避程度增加，期末平均財富會下降，因為風險趨避者偏好平穩之資產表現，而非高投資報酬率。

圖 4：不同風險趨避程度之最適投資比例 (γ 值，上 -1、下-3)

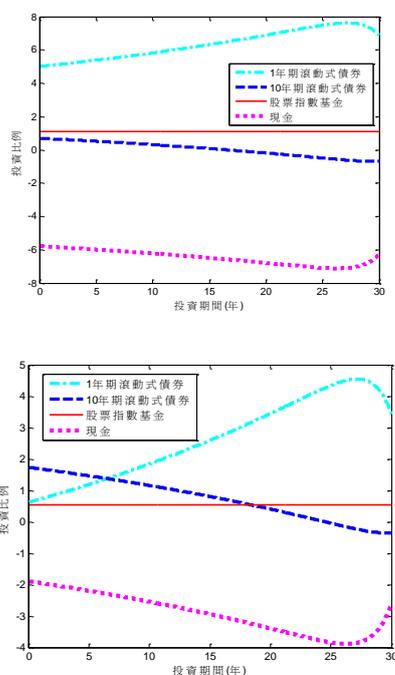
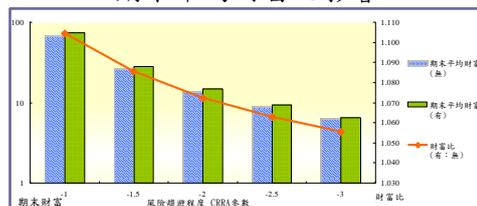


圖 5：不同風險趨避程度下學習效果對期末平均財富之影響



2.學習效果之效益

表 3 列出不同風險趨避程度下，有無學習機制下投資人期末財富之變異數、第五百分位數與期末平均財富效用值之增減。在期末財富變異數的部分，在不同風險趨避程度下，有學習效果下之變異數皆小於無學習效果之變異數，因此，變異數改善率皆為正數，改善率約為四成，且風險趨避程度增加，變異數改善更多。學習機制亦能有效對抗下方風險(因期末財富第五百分位數之改善率皆為大於 0)，這說明了學習機制對投資人是重要的。當風險趨避程度增加時(γ 越小)，期末財富的變異數會降低。這是因為風險越趨避的投資人投資策略越保守，在保守穩健的投資策略下，基金累積財富較不會受市場劇烈波動而影響，因此變異數會下降。保守的策略也反應在期末財富的第五百分位數上，當 γ 越小時，第五百分位數也越小。

其次以效用值角度分析學習效果之重要性，發現學習效果會使較風險趨避投資人之期末財富效用改善率較顯著。當 γ 為 -1 時，有學習效果之效用增加率為 16.743%；而 γ 為 -3 時，有學習效果之效用改善率為 34.949%。雖然有無學習之機制下兩種投資人的預期期末財富值相差不大，但因為風險趨避投資人的平穩投資策略使得變異數下降，進而使得學習效果對期末財富效用值之影響非

¹⁷ γ 值因為效用函式型式而有所限制，值域為 $(-\infty, 1)$ 。

常顯著。而這些發現顯示效用改善率對於風險趨避參數十分敏感，且呈非線性成長。

表 3：學習效果對不同風險容忍程度的期末平均財富與效用之影響

	-1.5	-2	-2.5	-3
3	28.176	14.714	9.245	6.521
6	8.558	7.244	6.280	5.543
7	59.200	13.984	4.970	2.284
9	41.689	43.334	44.468	45.294
6	17.503	9.459	6.079	4.359
1	30.922	27.035	24.417	22.375
3	22.016	26.629	30.893	34.949

(三)消費者物價指數動態過程之瞬間波動度(ξ_π)

1.最適投資策略之敏感度

ξ_π 為CPI動態過程之瞬間波動度，即CPI動態過程本身之不確定性，因此， ξ_π 越大代表觀察變數CPI變動越劇烈。圖6繪出 ξ_π 為0.04與0.08兩種情境下之最適投資策略，我們發現投資在1年期滾動式債券的比重會約略下降，而投資在10年期滾動式債券的比例會上升。而圖7繪出不同 ξ_π 下，有無學習效果之期末平均財富值與比例。首先，我們發現當 ξ_π 增加時，期末累積財富平均數會增加，這可能是因為 ξ_π 增加時，最適投資策略放在風險性資產(10年期滾動式債券)的比重略微增加，使得報酬率增加。但無論 ξ_π 為何，在具學習機制下呈現之最適投資策略仍可提高投資人的平均期末財富值，而有無學習效果之期末平均財富比值會隨著瞬間波動度 ξ_π 值增加而略微下降。

圖 6 不同消費者物價指數動態過程之瞬間波動度之最適投資比例

(ξ_π 值，上 0.04、下 0.08)

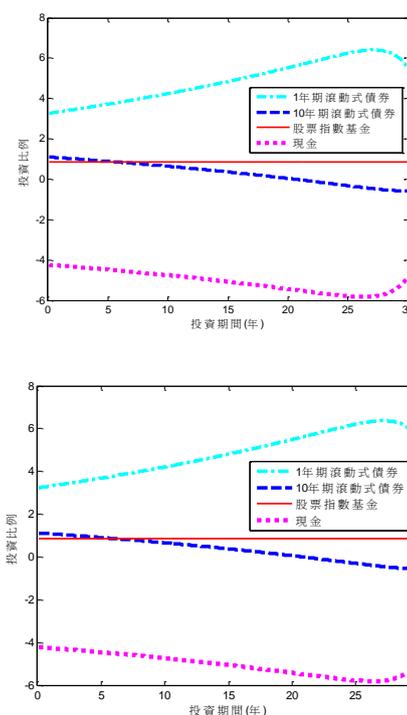
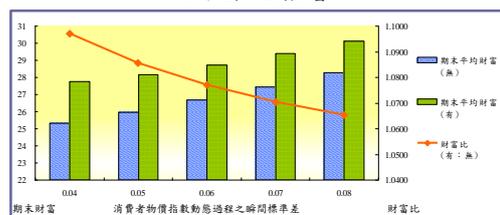


圖 7：不同 ξ_π 下學習效果對期末平均財富之影響



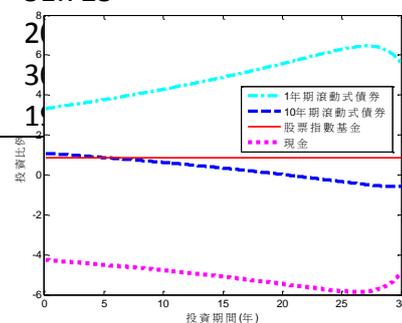
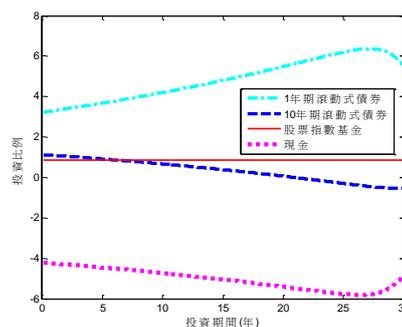
2.學習效果之效益

表 4 列出不同 ξ_π 值下，有無學習機制下投資人期末財富變異數、第五百百分位數以及期末平均財富效用值之增減，我們發現學習機制下，可降低投資人期末累積財富之變異數並降低下方風險。表 4 也列出學習效果對於投資人期末財富效用之影響，我們發現學習機制可增加投資人之期末財富效用值，但效用值增

加率會因瞬間波動度增加而下降(當 ξ_π 從 0.04 增加到 0.08，效用改善率從 23.152% 下降到 19.912%)，這是因為 ξ_π 增加代表消費者物價指數的波動度較大，較不易用來估計通貨膨脹動態過程。

表 4：學習效果對不同 ξ_π 的期末平均財富與效用之影響

ξ_π	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
期末平均財富(有)	27.760	28.176	28.736	29.393	30.123
財富改善率(%)	9.710	8.558	7.704	7.045	6.522
財富變異數(有)	67.918	59.200	54.398	51.675	50.210
變異數改善率(%)	35.787	41.689	45.954	49.185	51.723
財富第五百分位數(有)	16.514	17.503	18.401	19.239	19.239
百分位數改善率(%)	31.230	30.922	30.810	30.762	30.762
效用增加率(%)	23.152	22.016	21.149	20.465	20.465



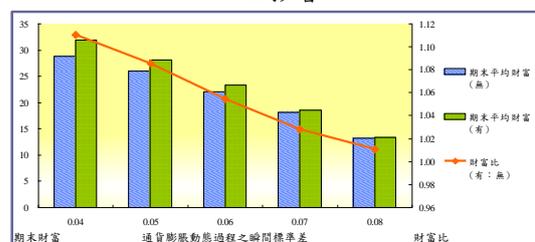
(四)通貨膨脹動態過程之瞬間波動度(σ_π)

1.最適投資策略之敏感度

圖 8 繪出 σ_π 等於 0.04 與 0.08 下之最適投資策略，我們發現當 σ_π 提高時會使 1 年期滾動式債券投資比例上升，10 年期滾動式債券投資比例下降。由於 10 年期滾動式債券投資比例的下降，整體投資組合報酬率會降低，因此，在圖 9 中，我們發現隨著 σ_π 越來越大，累積的期末財富平均值會變少。

圖 8：不同通貨膨脹動態過程之瞬間波動度之最適投資比例 (σ_π 值，上 0.04、下 0.08)

圖 9：不同 σ_π 下學習效果對期末平均財富之影響



2.學習效果之效益

在表 5 中，我們可以發現於學習效果下，所累積財富之變異數會較無學習機制來得低，而學習效果可降低期末財富變異數約 40%~60%。同時，依照學習效果進行動態資產配置策略的投資人也較能控制下方風險，且 σ_π 越大，學習機制對期末財富第五百分位數的改善率越大(σ_π 從 0.04 增加到 0.08，改善率增加兩倍到 99.951%)。接下來，我們衡量學

習效果對 σ_π 的敏感度，表 5 顯示，當 σ_π 從 0.04 增加到 0.08 時，學習效果對投資人所帶來的效用增加率會從 22.617%增加兩倍到 44.411%，顯示當通貨膨脹動態過程之波動愈大時，投資人越需要透過學習機制來更新對通貨膨脹之估計。

表 5：學習效果對不同 σ_π 的期末平均財富與效用之影響

	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
941	28.176	23.306	18.583	13.363	
013	8.558	5.424	2.841	1.091	
630	59.200	67.807	68.552	70.332	
601	41.689	50.143	58.434	64.546	
278	17.503	12.494	8.118	4.869	
161	30.922	39.333	54.452	99.951	
617	22.016	26.745	34.677	44.411	

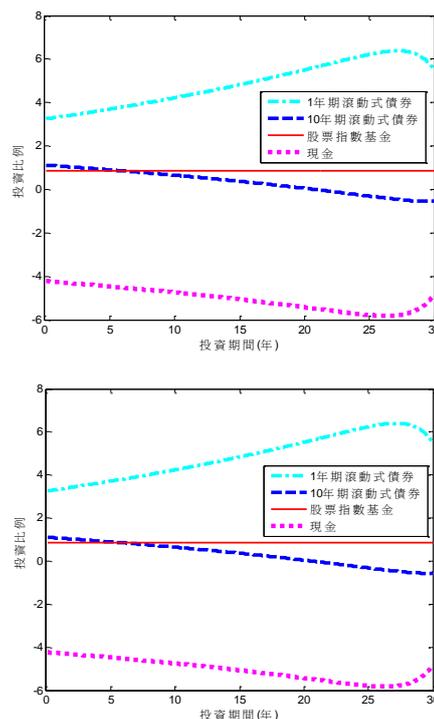


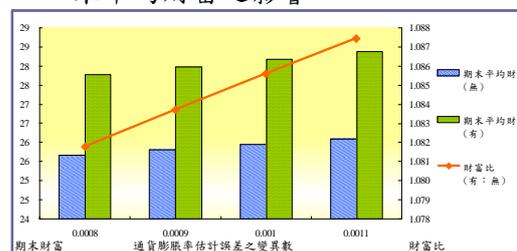
圖 11：不同 ν 下學習效果對期末平均財富之影響

(五)通貨膨脹率估計誤差之變異數(ν)

1.最適投資策略之敏感度

圖 10 繪出 ν 為 0.0008 與 0.0011 下之最適投資策略，當 ν 提高時，通貨膨脹動態過程較不易學習，因此 1 年期滾動式債券投資比例上升，10 年期滾動式債券投資比例下降，代表偏向較保守的投資。而圖 11 中，我們發現隨著 ν 越來越大，累積的期末財富平均值會略微增加。

圖 10：不同通貨膨脹率估計誤差之變異數之最適投資比例
(ν 值，上 0.0008、下 0.0011)



2.學習效果之效益

在表 6 中，我們可以看到在學習效果下，增加 ν 值會使得期末財富變異數增加，同時降低學習機制對於投資人所帶來的變異數改善率($\nu=0.0008$ 時，變異數改善率約為 48%，而 ν 增加到 0.0011 時，變異數改善率降低約 10%)，同時， ν 增加也降低了學習效果對投資人所帶來的下方風險改善率。其次，我們衡量學習效果對 ν 的敏感度，表 6 顯示，當 ν 從 0.0008 增加到 0.0011 時，學習效果對投資人所帶來的效用增加率會從 22.824%下降到 21.725%，可能是因為當通貨膨脹率估計誤差之變異數愈大時，

代表投資人對於通貨膨脹的估計準確度下降，因此減損學習機制對投資人所帶來之效用。

表 6：學習效果對不同 ν 的期末平均財富與效用之影響

0.0008	0.0009	0.001	0.0011
27.774	27.978	28.176	28.369
8.179	8.371	8.558	8.743
49.341	54.184	59.200	64.398
48.711	45.120	41.689	38.418
17.912	17.702	17.503	17.301
34.812	32.596	30.922	29.545
22.824	22.376	22.016	21.725

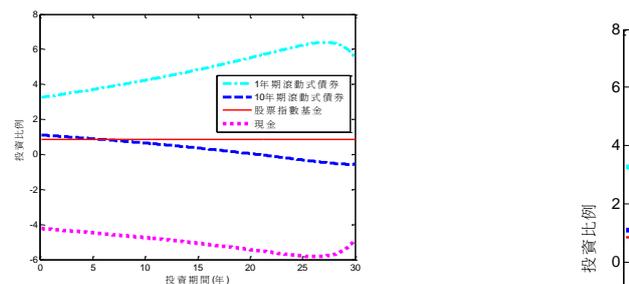


表 7：通貨膨脹與通貨緊縮

三、分析	情境	一：物價通膨		二：物價緊縮	
		a_0	0.001458	-0.001458	
(1)通貨膨脹與通貨緊縮(a_0)	期末平均財富(有)	28.176	10.141		
	財富改善率(%)	8.558	8.558		
	期末財富變異數(有)	59.200	7.668		
	變異數改善率(%)	41.689	41.689		
	較通貨膨脹與通貨緊縮下之資產第五百分位數改善率(%)	17.503	6.299		
	我們設定 π 小於 0 (亦即, a_0 小於 0) 效用增加率(%)	30.922	30.929		
	效用增加率(%)	22.016	22.016		

物價長期而言為緊縮。圖 12 的左圖，我們假設 a_0 為 0.001458，而右圖的 a_0 為 -0.001458，我們可以發現左圖與右圖投資策略之模式是一樣的，這是因為公式 (18) 的解中並沒有 a_0 。但期末財富有變化，表 6 我們模擬情境一 $a_0 = 0.001458$ (通貨膨脹) 與情境二 $a_0 = -0.001458$ (通貨緊縮)，在通貨緊縮下，名目利率會降低，因為本研究之名目利率已考慮通貨膨脹與緊縮之調整，因此債券與股票之報酬率也跟著下降，是故，在情境二下，期末平均財富會較情境一低。而表 7 也顯示無論在通貨膨脹或緊縮下，學習效果都能增進期末平均財富值與效用值，同時降低期末財富變異數，並改善下方風險結構，因為有學習效果之變異數改善率與第五百分位數改善率皆為正值。

圖 12：通貨膨脹與通貨緊縮之長期資產配置 (左：通貨膨脹、右：通貨緊縮)

(2)無學習效果投資人之比較

有學習能力的投資人會按照 (6) 式來更新對通貨膨脹之估計，而且會按照第參節所推導之最適投資策略分配投資比重，而無學習能力的投資人沒有任何依循來更新其對通膨的估計，只能隨意猜測。在 4.2 節中，我們假設在無學習效果的情境下，投資人臆測 a_0 是根據 $U(0, 0.0029)$ ，而 a_π 是服從 $U(-0.0, 50)$ 。

這一小節中，我們想再次驗證學習效果的重要性，我們改變均勻分配的長度，當均勻分配的長度越短，代表無學習機制投資人對 a_0 與 a_π 的臆測越接近隨著累積資訊所更新對通貨膨脹動態過程之估計的投資人。即當均勻分配的長度

越短，代表有無學習機制投資人的投資決策越接近，因此，均勻分配的長度越短，學習效果所帶來的影響應該越不明顯。

表 8 整理三種均勻分配的長度下(由左而右，長度越長)，有無學習機制投資人之期末平均財富、變異數、第五百分位數以及效用改善率之分析。期末平均財富改善率會隨著均勻分配長度縮短而上升，這是因為長度較短時，無學習機制投資人猜的較準確。而期末財富變異數改善率會隨著均勻分配的長度增加而增加，因為均勻分配長度越長，代表無學習機制投資人對於通貨膨脹動態過程參數的臆測較不準確；而期末財富第五百分位數之改善率也隨著均勻分配長度越長而增加。在效用改善率的部分，均勻分配的長度越長，改善率越高，代表學習機制對投資人是非常重要的。

表 8：不同投資人之比較

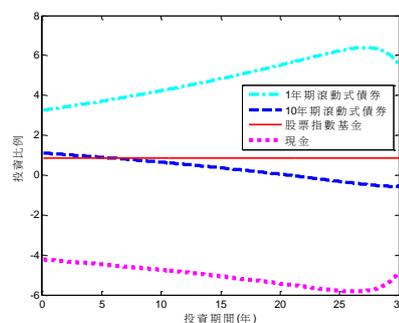
(-0.03Q-0.024)	U(-0.041-0.013)	U(-0.0540)
28.176	28.176	28.176
11.133	10.151	8.558
59.200	59.200	59.200
2.215	19.883	41.689
17.503	17.503	17.503
20.486	23.924	30.922
17.938	19.182	22.016

(3)市場風險之風險溢酬(λ_s)

於 Brennan 和 Xia (2002)研究中，其所估算的市場風險之風險溢酬過於樂觀，一般而言，風險溢酬為波動度的一半較為常見，因此，我們假設 λ_s 為 σ_s 的一半。在此設定下，基本上只會使股票的持有比例降低，如圖 11 的右圖。我們可以比較圖 13 的兩個圖，右圖僅將參數 λ_s 設定為 $\sigma_s/2$ ，由於 λ_s 變小，因此右圖中投資在股票指數基金之比例(紅色

細直線)較左圖低(0.200)，而 1 年期與 10 年期之滾動式債券投資比例兩者皆相同，因此，右圖中現金的放空部位會較左圖少。

圖 13：修正 λ_s 之長期資產配置(左： $\lambda_s=0.343$ 、右： $\lambda_s=0.076$)



Charles (2002)指出通貨膨脹對資產價值之重要性是不可忽視的，對於退休規畫及財富管理者，投資期間較一般投資者長，通貨膨脹之影響越顯著。舉例來說，當通貨膨脹率為 5%，10 年後資產實質價值剩下約 61%，而 20 年後僅剩 38%之價值，投資人更應謹慎處理通貨膨脹風險。而根據經濟合作與發展組織 (organization for economic co-operation and development; OECD)2008 年 7 月 27 日所公布之資料¹⁸，OECD 組織國之 2008 年 6 月平均月消費者物價 (consumer price)上升 4.4%，已達 2000 年 3 月以來最高的通貨膨脹率，因此，投資人應採取何種投資策略以抵抗通貨

¹⁸ 資料來源：OECD 網站統計資料，網址：www.oecd.org/home，查詢日期 2008 年 8 月 3 日。

膨脹風險一直是重要議題。

Xia (2001)利用學習機制更新對股價動態過程之估計，探討資產報酬不確定性下最適投資策略，其發現若投資人不對參數做預測與估計，進而無法掌握風險性資產進場時機，所產生之機會成本很高，也就是強調報酬率之預測非常重要。對長期投資人來說，通貨膨脹率影響了投資組合之實質報酬率，因此在參數不確定下，如何（學習）估計參數便顯得非常重要，本文依 Xia (2001)架構，以消費者物價指數之資訊，透過學習機制來更新對通貨膨脹動態過程之估計。

本文運用 Chang et al. (2008)的理論結果、以數量方法探討對通膨學習能力的實質經濟意涵。我們發現依學習機制修正之投資策略可顯著增加預期期末財富，降低變異數，並改善下方風險。依學習機制修正之投資策略亦改善投資人之效用值，效用改善率會受到參數數值之影響，歸納數值結果發現：

1. 投資期間(T)、風險趨避程度(γ)、通貨膨脹動態過程之瞬間波動度(σ_π)，會正向加強學習機制對效用之影響，使效用改善率增加。對長期投資人而言，受通貨膨脹風險影響越明顯，因此需要透過學習效果更新估計，才能使資產配置反應通貨膨脹。風險趨避投資人偏好低波

動度之資產組合，在學習機制下，投資人較能根據累積之通貨膨脹資訊調整資產配置。通貨膨脹動態過程之瞬間波動度(σ_π)越大，投資人越需要利用消費者物價指數更新對通貨膨脹估計。

2. 消費者物價指數動態過程之瞬間波動度(ξ_π)與通貨膨脹率估計誤差之變異數(V)增加時，學習機制可增加投資人之期末平均財富值並增加效用值，但效用之改善率會隨著消費者物價指數動態過程之瞬間波動度、通貨膨脹率估計誤差之變異數增加而略為下降。可能因為 ξ_π 增加，較不易估計通貨膨脹動態過程。而通貨膨脹率估計誤差之變異數愈大，也代表投資人對於通貨膨脹的估計準確度下降，因此減損學習機制對投資人所帶來的效用。

考慮法人或企業之資產配置時，以極大化預期期末財富效用值為目標函數是適切的，但在考慮個人資產配置時，需同時考慮消費，因此，後續研究會納入消費因素，探討學習機制對消費與投資策略之影響。並考慮納入放空限制式，使模型更貼近實際金融市場。

四、參考文獻

中央銀行網站網址
http://www.cbc.gov.tw/banking/rates_04.asp，

- 搜尋日期 2008 年 7 月。
- 行政院主計處網站網址 <http://www.dgbas.gov.tw/mp.asp?mp=1>，搜尋日期 2008 年 8 月。
- 經濟部網站網址 <http://www.moea.gov.tw/>，搜尋日期 2008 年 7 月。
- OECD 網站網址 www.oecd.org/home，搜尋日期 2008 年 8 月。
- Barberis, N., 2000, Investing for the Long Run when Returns are Predictable, *Journal of Finance* 55, 225-264.
- Basel, M.A., S.A.A. Ahmad, and M.S. Wafaa, 2004, Modelling the CPI Using a Lognormal Diffusion Process and Implications on Forecasting Inflation, *Journal of Management Mathematics* 15, 39-51.
- Battocchio, P. and F. Menoncin, 2004, Optimal Pension Management in a Stochastic Framework, *Insurance Mathematics and Economics* 34, 79-95.
- Bawa, V.S., S.J. Brown, and R.W. Klein, 1979, **Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice**, North-Holland, New York.
- Brennan, M.J. and Y.H. Xia, 2002, Dynamic Asset Allocation under Inflation, *Journal of Finance* 57, 1201-1238.
- Brennan, M.J., 1998, The Role of Learning in Dynamic Portfolio Decisions, *European Finance Review* 1, 295-306.
- Campbell, J.Y. and L.M. Viceira, 2001, Who Should Buy Long-Term Bonds? *American Economic Review* 91, 99-127.
- Chang, S.C., C.H. Tsai, and Y.W. Hwang, 2008, Dynamic Asset Allocation under Learning about Inflation, The 12th Annual Conference, Asia Pacific Risk and Insurance Association, Sydney, Australia.
- Charles D.E., 2002, **Winning the Loser's Game: Timeless Strategies for Successful Investing**. McGraw-Hill.
- Detemple, J.B., 1986, Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information, *Journal of Finance* 41, 383-391.
- Dothan, M.U. and D. Feldman, 1986, Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy, *Journal of Finance* 41, 369-382.
- Feldman, D., 1992, Logarithmic Preferences, Myopic Decisions, and Incomplete Information, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 27, 619-629.
- Gennotte, G., 1986, Optimal Portfolio Choice under Incomplete Information, *Journal of Finance* 41, 733-746.
- Kandel S. and R.F. Stambaugh, 1996, On the Predictability of Stock Returns: An Asset-Allocation Perspective, *Journal of Finance* 51, 385-424.
- Liptser, R.S. and A.N. Shiriyayev, 1978, **Statistics of Random Processes I: General Theory**, Springer-Verlag, New York.
- Liptser, R.S. and A.N. Shiriyayev, 1978, **Statistics of Random Processes II: Applications**, Springer-Verlag, New York.
- Rodriguez, J.F., 2002, Hedging Demands, Incomplete Markets, and Imperfect Information, Working Paper.
- Rogers, L.C.G., 2001, The Relaxed Investor and Parameter Uncertainty, *Finance and Stochastics* 5, 131-154.
- Rutkowski, M., 1999, Self-financing Trading Strategies for Sliding, Rolling-horizon, and Consol Bonds, *Mathematical Finance* 9, 361-385.
- Vasicek, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.
- Xia, Y., 2001, Learning about Predictability: The Effects of Parameter Uncertainty on Dynamic

Asset Allocation, *Journal of Finance* 56, 205-246.